Aplikácie štatistických rozdelení vo výrobnom inžinierstve

TEXT: RNDr. Jozef Majerčák, Fakulta výrobných technológií Technickej univerzity v Košiciach so sídlom v Prešove

V tomto príspevku sú uvedené základné informácie o niektorých typoch štatistických rozdelení. Pre jednotlivé rozdelenia sú charakteristické ich algoritmy a grafy. Aplikácie sú v tomto príspevku zamerané na výrobné inžinierstvo, ako aj na technickú prax.

Štatistické rozdelenia patria medzi najdôležitejšie pojmy štatistiky pravdepodobnosti náhodných veličín. Nimi sa riadi veľké množstvo štatistických javov, ktoré za istých podmienok dobre aproximujú spojité aj diskrétne veličiny. Za základné štatistické rozdelenie považujeme normálne (Gaussove) rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré sa spája s chybami merania. Podľa zákona chýb sa riadi aj rozdelenie niektorých fyzikálnych a technických veličín. V tomto príspevku sa budeme zaoberať aplikáciami niektorých štatistických rozdelení diskrétnej náhodnej premennej a čiastočne aj spojitej náhodnej premennej vo výrobnom inžinierstve.

Štatistické rozdelenia vo výrobnom inžinierstve

Najprv si všimneme, v ktorých etapách výrobného procesu môžeme vhodne použiť niektoré zo štatistických rozdelení. Ide najmä o tieto etapy:

Pri kontrole rozmerov a tvaru súčiastky

Operáciou, ktorá sprevádza všetky účelové technologické procesy je kontrola, či dosahovaný rozmer, alebo tvar súčiastky odpovedá údajom na výkrese. Vyrobiť rozmerovo ideálne presnú súčiastku je technologicky nemožné. Úlohou technológa je vo výrobe sa k presným rozmerom priblížiť a stanoviť toleranciu rozmerov súčiastky. [1]

Dodržanie presnosti výroby a jej kontroly má najmä tieto dôvody:

Vzájomná vymeniteľnosť súčiastok, montáž súčiastky s protikusom, unifikácia súčiastok, opakovateľnosť jej tvarov, napr. z estetických dôvodov.

Ak by sme zmerali rozmery vzorky vyrobených súčiastok a zostavili histogram rozdelenia, zistili by sme, že ide o štatisticky významný tvar – Gaussovo rozdelenie odchýlok od menovitého rozmeru súčiastky. Treba poznamenať, že reálny rozmer súčiastky je tiež relatívna veličina, lebo závisí od toho, aké meracie prostriedky sme použili.

Pri montáži súčiastky

Montážou nazývame súbor činností ľudí, strojov a zariadení, ktorých vykonaním v stanovenom poradí a čase vznikne z jednotlivých súčiastok a montážnych celkov hotový výrobok. [1] K spojovaniu sa používajú rôzne technologické metódy. V montážnom procese sa nevykonávajú len samotné montážne práce (skladanie, spájanie, apod.), ale aj práce, ktoré priamo s montážou nesúvisia. Napr. prípravné práce, manipulácie so súčiastkami, ako aj rôzne kontrolné a meracie činnosti.. Rozsah týchto činnosti je daný typom a rozsahom výroby. Podľa miesta, kde sa montážne práce vykonávajú poznáme internú a externú montáž. Z hľadiska toho, či sa pri montáži montovaný výrobok pohybuje alebo nie, poznáme stacionárnu a nestacionárnu montáž.

Nás bude zaujímať presnosť montáže z hľadiska rozmerov súčiastok s ich rozličnými výrobnými toleranciami. Je málo pravdepodobné, aby sa rozmery všetkých súčiastok rozchádzali blízko jedného, alebo druhého extrému predpísaných tolerancií. V praxi to znamená, že podľa zákona normálneho rozdelenia sa rozmery všetkých členov nachádzajú v oblasti rozptylu.

Z teórie štatistiky a pravdepodobnosti vieme, že pri ich vhodných aplikáciách vo výrobe sa presnosť výrobkov zvýši a výroba skvalitní. Umožňujú to štatistické výpočty, ako aj grafy normálneho rozdelenia.

Pri ďalších fázach výroby

– medzi ktoré patria, napr. optimalizácia technologických procesov, výroba súčiastok, prácnosť účelových pracovných procesov, zmeny vlastnosti materiálov, chyby merania atď.

Prehľad niektorých typov štatistických rozdelení [3]

Rozdelenia diskrétnej náhodnej premennej (nespojité):

- **binomické** – nezávislé pokusy s tzv. výberom s vrátením
- **geometrické** – výber bez vrátenia
- **Poissonovo** rozdelenie – náhodné javy v určitom časovom intervale

Rozdelenia spojitej náhodnej premennej (spojité):

- **normálne rozdelenie** (Gaussovo rozdelenie)
- **t – rozdelenie** (Studentovo rozdelenie)
- **χ^2 – rozdelenie** (chí–kvadrát rozdelenie)

Binomické rozdelenie

platí pre n nezávislých (Bernoulliho) pokusov, v ktorých jav A nastáva s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$ a doplnkový jav $A´$ má pravdepodobnosť $1 – p$.

Pravdepodobnosť, že pri n pokusoch nastane jav práve x – krát je daná vzťahom:

$$\mu = n.p \ \wedge \sigma^2 = n.p.(1-p) \ \Rightarrow$$
$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^x.(1-p)n-x) \qquad (1)$$

Aplikácia 1 Nech 70% súčiastok na sklade má kvalitu Q a zvyšok má normálnu kvalitu K. Náhodne vyberieme 5 súčiastok. Aká je pravdepodobnosť, že

a) tri súčiastky budú mať kvalitu Q,?
b) väčšina súčiastok bude mať kvalitu Q?
c) menšina súčiastok bude mať kvalitu K?

Riešenie

a)

$$P(X_5 = 3) = \binom{5}{3} 0{,}7^3.0{,}3^2 =$$
$$= 10.0{,}343..0.09 = 0{,}30870$$

b)

$$P(X_5 \geq 3) = P(X_5 = 3) + ... + P(X_5 = 5) =$$
$$\binom{5}{3} 0{,}7^3.0{,}3^2 + ... + \binom{5}{5} 0{,}7^5.0{,}3^0 =$$
$$= 0{,}30870 + 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}83692$$

c)

$$P(X_5 \leq 2) =$$
$$= P(X_5 = 2) + P(X_5 = 1) + P(X_5 = 0) =$$
$$= \binom{5}{2} 0{,}7^2.0{,}3^3 + 5.0{,}7^1.0{,}3^4 + 0{,}7^0.0{,}3^5 =$$
$$= 0{,}1323 + 0{,}02835 + 0{,}00243 =$$
$$= 0{,}16308$$

$SKÚŠKA$:

$$P(X_5 \leq 2) = 1 - P'(X_5 \geq 3) =$$
$$= 1 - 0{,}83692 = 0{,}16308$$

Skúškou správnosti riešenia pomocou doplnkovej pravdepodobnosti v prípade c) sme ukázali, že riešenie úlohy je správne.

Geometrické rozdelenie

Opäť budeme vychádzať z Bernoulliho pokusov, (t.j. sú nezávislé, s pravdepodobnosťou p), ale na rozdiel od binomického rozdelenia tu pôjde o výber bez vrátenia.

Pravdepodobnosť, že pri n pokusoch nastane jav práve x – krát je daná vzťahom:

$$\mu = \frac{1-p}{p} \ \wedge \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} \ \Rightarrow \qquad (2)$$
$$P(X = x) = p.(1-p)^x)..., m = 0{,}1{,}2{,}...$$

Aplikácia 2 Uskutočňujeme náhodný výber súčiastok z regálu, nech pre výber platí $P(X) = 0{,}6$

Zistime, pravdepodobnosť výberu na prvý pokus, na druhý a na n – tý pokus. Tiež zistíme stredný počet výberu súčiastok.

Riešenie

$$P(X_1 = 0) = 0{,}6.(1-0{,}6)^0 = 0{,}6.1 = 0{,}6$$
$$P(X_2 = 1) = 0{,}6.(1-0{,}6)^1 = 0{,}24$$

....

$$P(X_n = n-1) = 0{,}6.0{,}4^{n-1} = 0{,}6.0{,}4^{n-1}$$
$$(\eta + 1) = \frac{1-0{,}6}{0{,}6} + 1 = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}\overline{6}$$

Stredný počet zistení náhodného výberu je $1{,}\overline{6}$ krát.

Poinssonovo rozdelenie

Diskrétna veličina X má Poissonovo rozdelenie vtedy, ak rozdelenie pravdepodobnosti je dané vzťahom:

$$\mu = n.p = \lambda \ \wedge \sigma^2 = \lambda \ \Rightarrow$$
$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (3)$$

Aplikácia 3 Pri kontrole tesnosti blokov valcov motora bolo zistené, že 2 % blokov valcov je netesných a prepúšťajú mazivo. Zistime pravdepodobnosť , že medzi 100 náhodne vybranými blokmi valcov budú najviac štyri netesniace.

Riešenie

Predpokladáme, že počet blokov valcov, ktoré netesnia má štatistické rozdelenie Poissonovho typu. Pravdepodobnosť toho, že zo 100 blokov valcov budú najviac 4 netesniace vypočítame takto:

$$\mu = n.p = 100 \cdot 0.02 = \lambda = 2 \ \wedge \sigma^2 =$$
$$= \lambda = 2 \ \Rightarrow \ P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

V tabuľke pre Poissonovo rozdelenie nájdeme pre $\lambda = 2$ príslušné hodnoty:

$$P(x = 0) = 0{,}135335.100\% = 13{,}53\%$$
$$P(x = 1) = 0{,}270671.100\% = 27{,}07\%$$
$$P(x = 2) = 0{,}270671.100\% = 27{,}07\%$$
$$P(x = 3) = 0{,}180447.100\% = 18{,}04\%$$
$$P(x = 4) = 0{,}090224.100\% = 9{,}02\%$$

– –

$$P(x \leq 4) = 0{,}9497.100\% = 94{,}97\%$$

Pravdepodobnosť, že medzi 100 náhodne vybranými blokmi valcov budú najviac 4 netesniace je 94,97%.

Poznámka: Štatistické rozdelenia spojitej náhodnej premennej budeme analyzovať v inom príspevku. Na tomto mieste uvedieme iba niektoré aplikácie zo spojitej náhodnej premennej.

Aplikácia 4 Výrobok vyhovuje norme, ak jeho hmotnosť je z intervalu 68 až 69 gr. Vieme, že hmotnosť daných výrobkov má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 68{,}3$

a disperziou $\sigma^2 = 0{,}04$. Aká je pravdepodobnosť, že vybraný výrobok bude vyhovujúci?

Riešenie

Nech X je náhodná premenná pre hmotnosť daných výrobkov. Hľadáme pravdepodobnosť:

$$P(68 < Z < 69) = P(-1{,}5 < Y < 3{,}5) =$$
$$= \Phi(3{,}5) - [1 - \Phi(1{,}5)] =$$
$$= 0{,}999767 - 0{,}066807 = 0{,}93296$$

Aplikácia 5 Dva druhy výrobkov v sklade predstavujú graf hustoty **t**–rozdelenia, a to pre hodnoty stupňov voľnosti $v = 3$, aj $v = 60$ a kritickú hodnotu **t**–rozdelenia v intervale

$$\alpha \in (0{,}1) \Rightarrow t_v(\alpha).$$

Riešenie

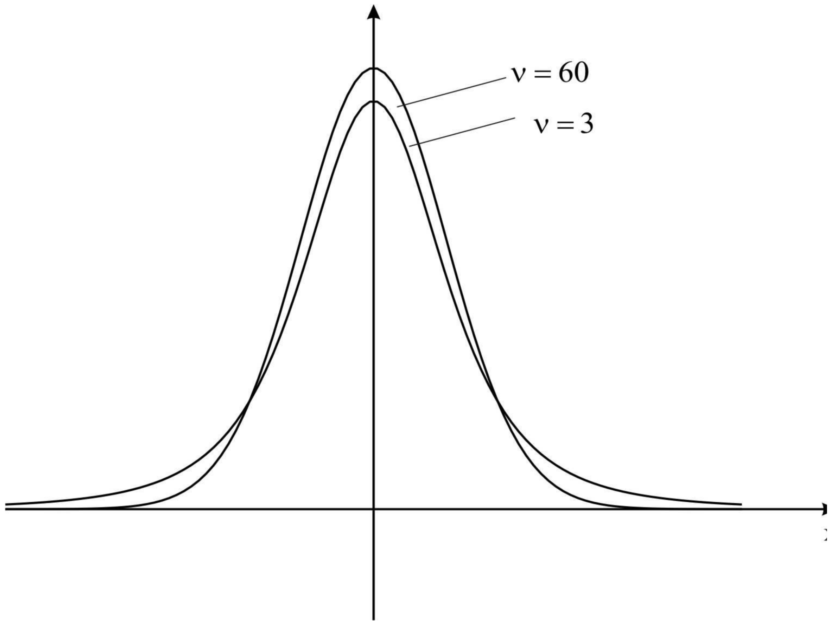
1) Graf (**t**) Studentovho rozdelenia zostrojíme s dvomi stupňami voľnosti $v = 3$, $v = 60$ (viď obr. 1).
2) Pre kritickú hodnotu Studentovho rozdelenia platí vzťah:

$$P(|T| > t_v(\alpha)) = \alpha$$

Aplikácia 6 Kvalita vyrobených súčiastok predstavuje grafy hustoty $\square^2$ – rozdelenia, a to pre dve hodnoty stupňov voľnosti v = 3, aj v = 4 a kritickú hodnotu χ^2–rozdelenia v intervale

$$\alpha \in (0{,}1) \Rightarrow \chi^2(\alpha)$$

Zobrazte oba grafy hustoty χ2–rozdelenia (viď obr. 2).



Obr. 2 Grafy chí–kvadrat rozdelenia so stupňami voľnosti v = 3, v =4.

Riešenie

1) Grafy chí kvadrat rozdelenia zostrojíme s dvomi stupňami voľnosti $v = 3$, $v = 4$

2) Pre kritickú hodnotu chí–kvadrat rozdelenia platí vzťah:

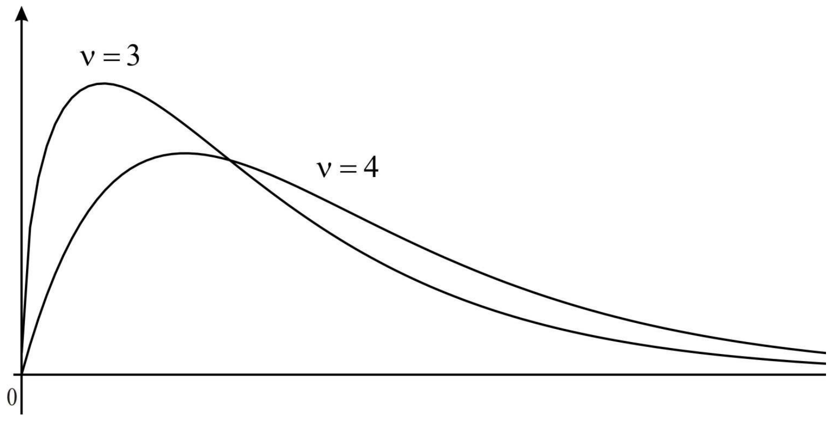
$$P(X > \chi^2(\alpha)) = \alpha$$

V tomto príspevku sme analyzovali a aplikovali niektoré typy štatistických rozdelení. Ukázali sme, že výrobné inžinierstvo je vhodnou živnou pôdou pre ich uplatnenie.

Poznámka: Príspevok bol vypracovaný s grantovou podporou VEGA č. 1/0345/08: Modelovanie a simulácia mechatronických systémov pre strojárstvo.

Literatúra

1. VASILKO, K., NOVÁK–MARCINČIN, J., HAVRILA, M.: Výrobné inžinierstvo, Prešov, FVT TUKE, 2003, s. 423
2. HRUBINA, K. a kol.: Riešené úlohy algoritmami numerických metód s podporou PC. Informatech : Košice, 2002, 236 strán.
3. ŠEBEJ, P.: Štatistika – vybrané časti. Informatech Ltd Košice, Prešov, FVT TUKE, 2001, s. 241



Obr. 1 Grafy Studentovho rozdelenia, stupne voľnosti: v = 3, v =60.

RESUMÉ

The paper deals with the basic knowledge about some statistical distributions. Generally, normal distribution is the fundament of statistical distributions. Particular types of statistical distributions are described by algorithms and their graphs. There are shown examples, which are focus on manufacturing engineering and technical practice.